NAGY

Estratto dalla *Rivista di Matematica* — Anno 1892, pag. 177-179.

Opusc. PA-I-209
FACOLTA' DI LETTERE E FILOSOFIA TORINO BIBLIOTECA
48119/209
84309

I teoremi funzionali nel calcolo logico.

La questione di sapere se nel calcolo logico esistano o no funzioni legate da speciali teoremi (per es. additivi, moltiplicativi ... o ancor più complicati), si riduce al vedere se vi sono delle funzioni f, che soddisfanno ad un'equazione

$$(1)\ldots\qquad G\{f[\psi(a,b)],\ f(a),\ f(b)\} = 0$$ ([1]),

ove G è la relazione che lega la $f[\psi(a,b)]$ con le $f(a)$ e $f(b)$, ψ esprime la natura del teorema funzionale, a e b sono quantità logiche qualsivoglia.

Risolvendo l'equazione (1) per $f[\psi(a,b)]$ avremo:

$$(2)\ldots\qquad f[\psi(a,b)] = \varphi[f(a),\ f(b)]$$

dove, com'è noto, φ contenendo, oltre le variabili, alcune quantità indeterminate, può assumere infiniti valori. Pertanto vi sarà, in generale, un numero infinito di soluzioni e, quindi, di funzioni f, che godono una comunque data proprietà funzionale ψ. Importa determinarle.

All'uopo si sviluppi il membro a sinistra, della (2), per $\psi(a,b)$ e quello a destra per $f(a)$ e $f(b)$:

$$f(1)\psi(a,b) + f(0)\psi_1(a,b) = \varphi(1,1)f(a)f(b) + \varphi(1,0)f(a)f_1(b) + \varphi(0,1)f_1(a)f(b) + \varphi(0,0)f_1(a)f_1(b)\,,$$

quindi, sviluppando le ψ, ψ_1, f, f_1, per a e b:

$$\begin{aligned} &f(1)[\psi(1,1)ab + \psi(1,0)ab_1 + \psi(0,1)a_1b + \psi(0,0)a_1b_1] \\ &+ f(0)[\psi_1(1,1)ab + \psi_1(1,0)ab_1 + \psi_1(0,1)a_1b + \psi_1(0,0)a_1b_1] \\ &= \varphi(1,1)[f(1)a + f(0)a_1][f(1)b + f(0)b_1] + \varphi(1,0)[f(1)a \\ &+ f(0)a_1][f_1(1)b + f_1(0)b_1] + \varphi(0,1)[f_1(1)a + f_1(0)a_1][f(1)b \\ &+ f(0)b_1] + \varphi(0,0)[f_1(1)a + f_1(0)a_1][f_1(1)b + f_1(0)b_1] \end{aligned}$$

([1]) Uso la notazione dello SCHRÖDER.

e sussistendo l'(1) per i valori speciali 0 ed 1 di a e b, si ottiene, coll'eguagliare i coefficienti dei costituenti ab, ab_1, a_1b, a_1b_1:

$$(3)\ldots\left\{\begin{array}{l} f(1)\psi(1,1)+f(0)\psi_1(1,1)=f(1)\varphi(1,1)+f_1(1)\varphi(0,0) \\ f(1)\psi(1,0)+f(0)\psi_1(1,0)=f(0)f(1)\varphi(1,1)+f_1(0)f(1)\varphi(0,1) \\ +f(0)f_1(1)\varphi(1,0)+f_1(0)f_1(1)\varphi(0,0) \\ f(1)\psi(0,1)+f(0)\psi_1(0,1)=f(0)f(1)\varphi(1,1)+f(0)f_1(1)\varphi(0,1) \\ +f_1(0)f(1)\varphi(1,0)+f_1(0)f_1(1)\varphi(0,0) \\ f(1)\psi(0,0)+f(0)\psi_1(0,0)=f(0)\varphi(1,1)+f_1(0)\varphi(0,0)\,. \end{array}\right.$$

Risolvendo questo sistema d'equazioni per $f(0)$ e $f(1)$, la funzione f è pienamente determinata.

Così — cito i casi più semplici — le funzioni

$$f(a)=a+m\,,\qquad f(a)=a.m\,,$$

cioè la somma ed il prodotto logico, godono le proprietà funzionali

$$f(a+b)=f(a)+f(b)\qquad\text{[come la } f(a)=am \text{ dell'algebra]}$$
$$f(a.b)=f(a).f(b)\qquad\text{[come la } f(a)=m^a\text{]}.$$

Diffatti, essendo per la prima proprietà:

$$\psi(a,b)=a+b\,,$$
$$\varphi[f(a),f(b)]=f(a)+f(b)$$

e quindi

$$\psi(1,1)=\psi(1,0)=\psi(0,1)=1\,,$$
$$\psi(0,0)=0\,,$$
$$\varphi(1,1)=\varphi(1,0)=\varphi(0,1)=1\,,$$
$$\varphi(0,0)=0\,,$$

la seconda o la terza equazione del sistema (3) dànno la condizione

$$f(0)f_1(1)=0\,,$$

che è manifestamente soddisfatta dai valori

$$f(0)=m\,,\qquad f(1)=1\,,$$

della somma e

$$f(0)=0\,,\qquad f(1)=m\,,$$

del prodotto logico.

Alla seconda proprietà corrisponde la medesima equazione condizionale.

In modo analogo si accerta che la negazione logica:

$$f(a)=a_1$$

possiede i due teoremi funzionali

$$f(a+b)=f(a).f(b)\qquad\text{[come la } f(a)=\log a\text{]}$$
$$f(a.b)=f(a)+f(b)\qquad\text{[come la } f(a)=a^m\text{]},$$

soddisfacendo alla condizione

$$f(1)f_1(0) = 0 .$$

All'incontro non v'è alcuna funzione logica che goda la proprietà

$$f(a+b) = f(a)f_1(b) + f_1(a)f(b)$$

[come, posto $f_1(a) = \cos a$, la $f(a) = \operatorname{sen} a$],

perchè la prima e la quarta equazione in (3) dànno allora

$$f(1) = f(0) = 0 ,$$

cioè, per qualsiasi a,

$$f(a) = 0 .$$

Velletri, Novembre 1892.

ALBINO NAGY.

Torino - Tip. Carlo Guadagnini, via Gaudenzio Ferrari, 3.